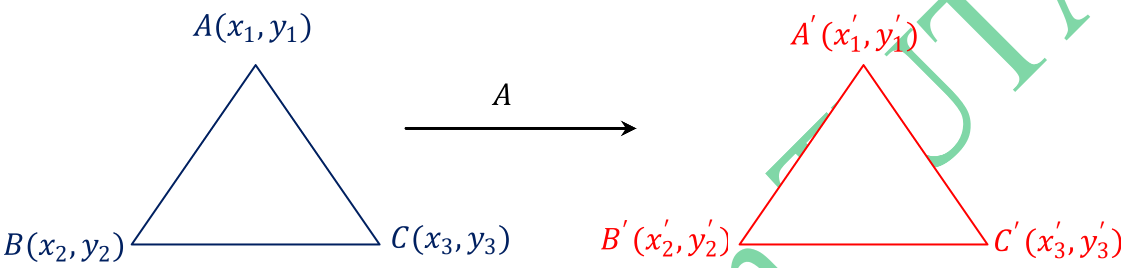
MAT497 Dönüşümler ve Geometriler Final Sınav Cevap Anahtarı (22.01.2024)

1.) $A \ldots \begin{cases} x' &= x \\ y' &= cx + dy \end{cases} ; c, d \neq 0,$

ilkel afin dönümü altında bir üçgenin alanı ile esas üçgenin alanı arasındaki ilişkiyi araştırınız. Bundan faydalanarak A ilkel afin dönüşümü altında iki üçgenin alanları oranının korunup-korunmadığını araştırınız**(20 P.)**.

Çözüm: $A \ldots \begin{cases} x' &= x \\ y' &= cx + dy \end{cases}, \quad \Delta = d \neq 0,$



Esas üçgenin alanına S dersek, $2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ dir. Bu durumda A ilkel dönüşümü altındaki üçgenin alanı

$$2S' = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & cx_1 + dy_1 & 1 \\ x_2 & cx_2 + dy_2 & 1 \\ x_3 & cx_3 + dy_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & cx_1 & 1 \\ x_2 & cx_2 & 1 \\ x_3 & cx_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & dy_1 & 1 \\ x_2 & dy_2 & 1 \\ x_3 & dy_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 2S' = c\underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}_{0} + d\underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}_{2S} \Rightarrow 2S' = d.2S \Rightarrow S' = d.S \text{bulunur.}$$

Şimdi, A ilkel afin dönüşüm altında iki üçgenin alanları oranının korunup-korunmadığına bakalım:

$\frac{S_1'}{S_2'} = \frac{d.S_1}{d.S_2} \Rightarrow \frac{S_1'}{S_2'} = \frac{S_1}{S_2}$olduğundan alanları oranı korunur.

2.) $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2),\ C\left(\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \frac{y_1+ry_2}{1+r}\right),\ r \neq -1$noktalarının aynı doğru üzerinde olup olmadığını araştırınız**(20 P.)**.

Çözüm: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \frac{x_1+rx_2}{1+r} & \frac{y_1+ry_2}{1+r} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1+r}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1+rx_2 & y_1+ry_2 & 1+r \end{vmatrix}$

$1.\,\text{satırı} -1 \text{ ile çarpıp } 3.\,\text{satıra eklersek}$

$$= \frac{1}{1+r}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ rx_2 & ry_2 & r \end{vmatrix} = \frac{r}{1+r}\underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}_{0} = 0$$

olduğundan A, B, C noktaları lineer bağımlıdır. Yani, aynı doğru üzerindedirler.

3.) $T \ldots \begin{cases} x' = & x-y \\ y' = & y \end{cases}$dönüşümü veriliyor. Bu dönüşümün $d. \ldots x+y+1=0$doğrusu üzerindeki uzaklıkları nasıl değiştirdiğini araştırınız**(20 P.)**.

ÇÖZÜM: $P_i(x_i,y_i) \in d,\ \ i=1,2,$ olsun. Bu durumda; $x_i+y_i+1=0 \Rightarrow x_i = -1-y_i$ (■) dir.

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-1-y_2-(-1-y_1))^2+(y_2-y_1)^2} \Rightarrow$$

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(-1-y_2+1+y_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{2(y_2-y_1)^2} \text{ dir.}$$

$$P_i'(x_i',y_i') = T(P_i) = (x_i-y_i\,, y_i), \qquad i=1,2$$

$$d(P_1',P_2') = \sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2} = \sqrt{(x_2-y_2-x_1+y_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

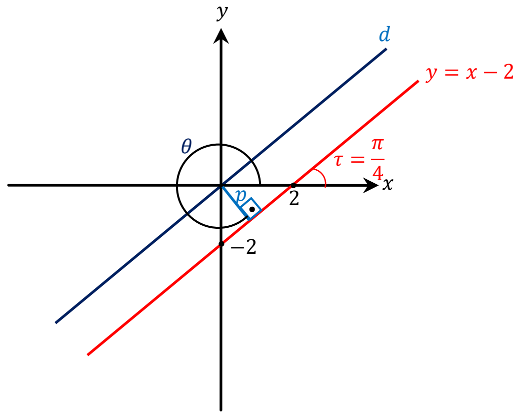
$$\Rightarrow d(P_1',P_2') \underbrace{=}_{(\blacksquare)\text{dan}} \sqrt{(-1-y_2-y_2+1+y_1+y_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\Rightarrow d(P_1',P_2') = \sqrt{(2y_1-2y_2)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{5(y_2-y_1)^2}$$

$\Rightarrow d(P_1',P_2') = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}d(P_1,P_2) = \frac{\sqrt{10}}{2}d(P_1,P_2)$elde edilir.

2.) $y = x - 2$ doğrusuna göre yansımanın denklemini bulunuz. Bu yansıma altında $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$geometrik şeklin resmini bulunuz**(20P.)**.

Çözüm: $y = x - 2 \Rightarrow tan\tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{4}$ dir. $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ dir.



Not: (x_0, y_0) noktasının $ax + by + c = 0$ doğrusuna uzaklığı $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$dir.

$x - y - 2 = 0$, $(x_0, y_0) = (0,0)$ dan $a = 1, b = -1, c = -2$,

$p = \frac{|1.0+(-1).0-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ dir.

Orijinden geçmeyen herhangi bir doğruya göre yansıma denkleminin

$$R \ \cdots \ \begin{cases} x' = xcos2\tau + ysin2\tau + 2p.cos\theta \\ y' = xsin2\tau - ycos2\tau + 2p.sin\theta \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklemde $\tau = \frac{\pi}{4}, p = \sqrt{2}, \theta = \frac{7\pi}{4}$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$R \ \cdots \ \begin{cases} x' = y + 2.\sqrt{2}.\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \\ y' = x + 2.\sqrt{2}.\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \Rightarrow R \ \cdots \ \begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = x - 2 \end{cases} \Rightarrow R^{-1} \ \cdots \begin{cases} x = y' + 2 \\ y = x' - 2 \end{cases}$$

bulunur.

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow (y' + 2 - 3)^2 + (x' - 2 - 1)^2 = 1$$
$$\Rightarrow (y' - 1)^2 + (x' - 3)^2 = 1$$

Not: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ çemberinin merkezi olan $(3,1)$ noktası $y = x - 2$ doğrusu üzerinde olduğundan bu çemberin resmi kendisidir.

5.) Afin dönüşümlerin kümesi$\mathcal{A}$ olmak üzere

$$A_1 \ldots \begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases},$$

ve

$$A_2 \ldots \begin{cases} x'' = A\,x' + B\,y' + M \\ y'' = C\,x' + D\,y' + N \end{cases}$$

iki afin dönüşüm olsun. A_2A_1 nin bir afin dönüşüm olduğunu gösteriniz**(20P.)**.

Çözüm:$A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ için $A_2A_1 \in \mathcal{A}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$A_2A_1 \ldots \begin{cases} x'' = A(ax + by + m) + B(cx + dy + n) + M \\ y'' = C(ax + by + m) + D(cx + dy + n) + N \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_2A_1 \ldots \begin{cases} x'' = \overbrace{(aA + cB)}^{a_1}x + \overbrace{(bA + dB)}^{b_1}y + \overbrace{(mA + nB + M)}^{m_1} \\ y'' = \underbrace{(aC + cD)}_{c_1}x + \underbrace{(bC + dD)}_{d_1}y + \underbrace{(mC + nD + N)}_{n_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_2A_1 \ldots \begin{cases} x'' = a_1x + b_1y + m_1 \\ y'' = c_1x + d_1y + n_1 \end{cases}$$

bulunur. Acaba $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \neq 0$ mıdır ?

$A_1 \in \mathcal{A}$olduğundan$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$,

$A_2 \in \mathcal{A}$ olduğundan $\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \neq 0$dır.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1.d_1 - b_1.c_1 = (aA + cB)(bC + dD) - (bA + dB)(aC + cD)$$

$$\Rightarrow \Delta = abAC + adAD + bcBC + cdBD - abAC - bcAD - adBC - cdBD$$

$$\Rightarrow \Delta = ad(AD - BC) - bc(AD - BC)$$

$$\Rightarrow \Delta = \underbrace{(AD - BC)}_{\neq 0}\underbrace{(ad - bc)}_{\neq 0} \neq 0$$

dır. O halde $A_2A_1 \in \mathcal{A}$ dır.